2. izbirni test za MMO 2025

Ljubljana, 13. februar 2025

1. Naj bo I središče včrtane krožnice ostrokotnega trikotnika ABC in P od I različna točka na poltraku AI. Naj bosta D in E taki točki na očrtani krožnici trikotnika BCI, da je $\angle CDP = 90^\circ$ in $\angle BEP = 90^\circ$. Dokaži, da se premice BD, CE in AI sekajo v eni točki.

3. Določi vse polinome P s celoštevilskimi koeficienti, za katere obstaja tako naravno število N, da je za vsa naravna števila $n \geq N$ število $P(n)$ pozitiven delitelj števila $n!$.

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 4 ure 30 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

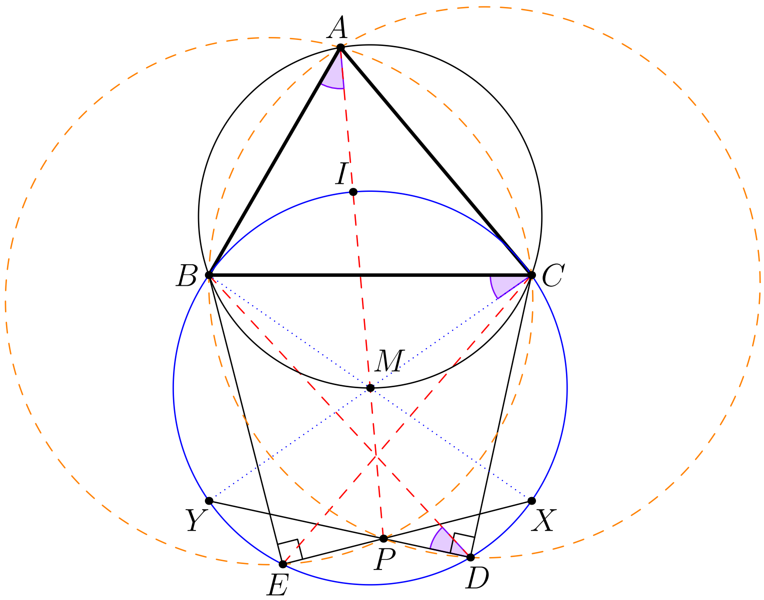
© 2025 DMFA Slovenije, Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli

Rešitve

1. Naj bo M drugo presečišče premice AI s trikotniku ABC očrtano krožnico. Znano je, da je M središče trikotniku BIC očrtane krožnice. Naj bosta X in Y taki točki na tej krožnici, da sta BX in CY premera. Po Talesovem izreku tako sledi, da X leži na premici PE, Y pa na premici PD. Tako dobimo

$$\angle BDP = \angle BDY = \angle BCY = \angle BCM = \angle BAM = \angle BAP,$$

zato so točke A, B, P in D konciklične. Analogno sklepamo, da so konciklične tudi točke A, C, P in E. Iskano presečišče je torej kar potenčno središče teh dveh krožnic in očrtane krožnice trikotnika BIC, saj so njihove potenčne premice BD, CE in AP.



3. Nalogo rešijo vsi polinomi oblike

$$P(x) = c \cdot \prod_{i=1}^{k} (x - a_i),$$

kjer so k in $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ nenegativna cela števila. Res, za vsak $n \geq c + a_k + 1$ je

$$\frac{n!}{P(n)} = \frac{c!}{c} \cdot \left(\frac{n!}{c!} \cdot \prod_{i=1}^{k} (n - a_i)^{-1} \right),$$

ker pa so $n - a_i$ različna cela števila z intervala $[c + 1, n]$, je zgornji izraz res celo število. Dokažimo, da so to vse rešitve.

Naj bo p praštevilo, ki deli $P(n)$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Naj bo r ostanek števila n pri deljenju s p. Ker $p \mid P(n) - P(r)$, sledi tudi $p \mid P(r)$. Če je $r \geq N$, sledi $p \mid P(r) \mid r!$, kar ni mogoče, saj je $r < p$. Sledi, da med števili $P(0), P(1), \ldots, P(N-1)$ obstaja tako, ki je deljivo s p. Sedaj ločimo dva primera:

i) Med števili $P(0), P(1), \ldots, P(N-1)$ ni ničel. Ta števila imajo zato končno mnogo praštevilskih deliteljev, po zgornjem razmisleku pa sledi, da obstaja končno mnogo praštevil p, za katere $p \mid P(n)$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Označimo jih s $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Naj bo
$$P(N) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$
Označimo še
$$A = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i+1}.$$
Tako sledi
$$P(N + x \cdot A) \equiv P(N) \pmod{A},$$
kar pomeni, da $p_i^{\alpha_{i+1}} \nmid P(N+x \cdot A)$ za vsak i. Sledi, da je $P(N+x \cdot A) \leq P(N)$, kar je mogoče le, če je P konstanten polinom.

ii) Eno izmed števil $P(0), P(1), \ldots, P(N-1)$ je enako 0. Naj bo torej $P(a) = 0$ in zapišimo $P(x) = (x-a) \cdot Q(x)$. Opazimo, da če $P(n) \mid n!$, tudi $Q(n) \mid n!$, zato tudi Q izpolnjuje pogoje. Razmislek lahko sedaj ponovimo na polinomu Q. Ker je $\deg Q = \deg P - 1$, bomo na koncu prišli do konstantnega polinoma.

Tako sledi, da za P velja
$$P(x) = c \cdot \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{d_i},$$
kjer so k in $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ nenegativna cela števila. Predpostavimo, da je $d_i > 1$ za nek indeks i. Naj bo $n = p + a_i$, kjer je p praštevilo, za katerega velja $p > \max(a_i, N)$. Tako sledi
$$p^2 \mid (n - a_i)^{d_i} \mid P(n) \mid n!,$$
kar je mogoče le, če je $n \geq 2p$, oziroma $a_i \geq p$, kar ne drži po izbiri števila p. Sledi, da je P res oblike
$$P(x) = c \cdot \prod_{i=1}^{k} (x - a_i).$$